

$m \times k$ ўлчамли A матрицанинг $k \times n$ ўлчамли B матрицага қўпайтмаси деб, $m \times n$ ўлчамли шундай $C = A \cdot B$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементи A матрицанинг i -сатри элементлари-ни B матрицанинг j -устунидаги мос элементларига қўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Агар $AB = BA$ бўлса, у ҳолда A ва B матрицалар ўрни алмашинадиган ёки коммутатив матрицалар дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг AB ва BA қўпайтмаларини топинг.

Ечиш. AB матрица 2×2 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 28 & -39 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BA матрица 3×3 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ 3 & -13 & 17 \\ 2 & 24 & -33 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$AB \neq BA$ бўлганлиги сабабли A ва B матрицалар коммутатив эмас.

1.3.3. Агар квадрат матрица махсусмас бўлса, у ҳолда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона A^{-1} матрица мавжуд бўлади ва у A матрицага *тескари матрица* дейилади. A матрицанинг A^{-1} тескари матрицаси қуйидагича аникланади:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бу ерда A_{ik} A матрица детерминанти a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси.

2-мисол. Берилган

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot (-6) = -4 \neq 0.$$

Демак, A матрица махсусмас матрица экан. Энди A_{ik} алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Тескари матрицани тузамиз:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ эканини текшириш мумкин.

1.3.4. n та номаълумли n та чизикли тенгламалар системаси

ни матрица кўринишда

$$AX=B$$

каби ёзиш мумкин, бунда

Агар A махсусмас матрица, яъни $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу системанинг матрица шаклидаги ечими ушбу кўринишга эга бўлади:

$$X = A^{-1}B.$$

1.3.5. A матрицанинг ранги деб, унинг нолдан фаркли минорларининг энг катта тартибига айтилади ва у $\text{rang}(A)$ каби белгиланади.

Матрицани куйидаги алмаштиришлар элементар алмашти-
ришлар деб аталади:

- а) факат ноллардан иборат сатрни (устунни) ўчириш;
б) иккита сатрнинг (устуннинг). ўринларини алмаштириш,
в) бир сатр (устун)нинг барча элементларини бирор кўпай-
тувчига кўпайтириб, бошқа сатр (устун)нинг мос элементларига
кўшиш;
г) сатр (устун)нинг барча элементларини нолдан фарқли бир
хил сонга кўпайтириш.

Элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди. Шу сабабли, элементар алмаштиришлардан фойдаланиб, матрицани диагонал элементларидан ташқари барча элементлари нолга тенг бўладиган кўринишга келтириш мумкин. Бу ҳолда матрица ранги диагоналдаги нолга тенг бўлмаган элементлари сонига тенг бўлади.

3- м и с о л. Матрица рангини топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ечиш. Матрица устида элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ҳосил қилинган матрицанинг ранги 2 га тенг, демак, берилган A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлади:

1.3.6. Кронекер — Капелли теоремаси. n та номаълумли m та чизикли тенгламалар системаси

[illegible]

биргаликда бўлиши учун

$$\text{rang } A = \text{rang } B$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

системанинг асосий матричаси,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

системанинг кенгайтирилган матричаси. Агар $\text{rang } A = n$ бўлса, у ҳолда системанинг детерминанти нолдан фаркли бўлиб, у *ягона ечимга* эга бўлади; агар $\text{rang } A < n$ бўлса, у ҳолда система ($n - \text{rang } A$) та ихтиёрий параметрга боғлиқ бўлган *чексиз кўп* ечимга эга бўлади.

Агар барча b_i озод ҳадлар нолга тенг бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси *бир жинсли* дейилади. Бундай тенгламалар системасида ҳар доим $\text{rang } A = \text{rang } B$, шу сабабли бир жинсли система биргаликда бўлади. Бир жинсли тенгламалар системасини $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ кийматлар қаноатлантиради, лекин A матрицанинг ранги нолга тенг бўлиб, система нолмас ечимга эга бўлади.

4- м и с о л: Ушбу

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

қизикли тенгламалар системаси биргаликдалигини аниқланг.

Ечиш. Берилган системанинг A асосий ва B кенгайтирилган матрицаларини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сатрлар устида тегишли элементар алмаштиришларни бажариб, бу матрицаларнинг рангини топамиз:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 42/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 29/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, $\text{rang} B = 4$, $\text{rang} A = 3$, яъни $\text{rang} B \neq \text{rang} A$.
 Демак, система биргаликда эмас.
 5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

бир жинсли системани ечинг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 13 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rang} A = 2 < 3$ (3 — номаълумлар сони), чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Демак, система нолмас ечимларга эга ва системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 80 - 1 - 12 - 15 - 16 = 80 - 80 = 0$$

бўлгани сабабли улар чексиз кўпдир. Системанинг дастлабки икки тенгламасини ечамиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Бу системада x_3 ли ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3 \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases}$$

Бу системани Крамер қоидадан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Шундай қилиб, $x_1 = -\frac{17x_3}{13}$, $x_2 = \frac{16x_3}{13}$, $x_3 = 13t$ бўлсин (t — ихтиёрий мутаносиблик коэффициент). У ҳолда $x_1 = -17t$; $x_2 = 16t$; $x_3 = 13t$. t га ихтиёрий қийматларни бериб, чексиз кўп ечимларни ҳосил қиламиз.

3- дарсхона топшириғи

1. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

бўлса, $3A + 2B$ ни ҳисобланг.

$$\text{Ж: } 3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган. AB ва BA ларни топинг.

$$\text{Ж: } AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$